

Due riflessioni sull'attività in matematica

Gérard Vergnaud

Direttore di Ricerca emerito al CNRS

Abstract. *This short paper presents some considerations on the terms “situations” and “conceptual fields”; “diagram”, “algorithm” and “instinct”.*

Keywords: situation, conceptual field, diagram, algorithm, instinct

Sunto. *In questo breve testo si compiono considerazioni relative ai termini “situazioni” e “campi concettuali”; “schema”, “algoritmo” e “istinto”.*

Parole chiave: situazione, campo concettuale, schema, algoritmo, istinto

Resumen. *En este breve texto se proponen consideraciones relativas a los términos “situaciones” y “campos conceptuales”; “esquema”, “algoritmo” e “instinto”.*

Palabras clave: situación, campos conceptuales, esquema, algoritmo, instinto

1. Premessa

Un primo punto di riflessione   che, se la conoscenza matematica si esprime classicamente attraverso concetti e teoremi, l'attivit  matematica in situazione non pu  per  essere descritta totalmente e direttamente in questo modo: come ogni attivit , e in particolare come il gesto, l'attivit  matematica ha un decorso temporale; in un certo senso, il trattamento di una situazione e il ragionamento sono dei gesti. Pi  in generale, il pensiero stesso   un gesto. Ma, siccome occorre che le conoscenze siano contenute nell'organizzazione dell'attivit  per ci  che in essa c'  di operatorio, occorre considerare con seriet  il ruolo della concettualizzazione:   questo che mi ha spinto a introdurre in passato le due idee di “concetto-in-atto” e di “teorema-in-atto”, che richiamer  tra breve con degli esempi. La matematica   dunque allo stesso tempo conoscenza e attivit .

Un secondo punto di riflessione   che questa attivit  non pu  essere indipendente dalle altre attivit  che si riscontrano nel corso della vita ordinaria, della vita scolare e professionale, dato che   proprio nel corso di queste attivit  che interviene l'attivit  matematica stessa. Si   allora condotti ad avvicinare l'uno all'altro i concetti che designano delle forme di organizzazione dell'attivit , e quasi a unificare il concetto di algoritmo a quelli di schema e di istinto. Schema e istinto si rivolgono assai spesso a delle situazioni per le quali non esiste alcun algoritmo; i gesti degli sportivi e dei ballerini, l'orientamento e il movimento nello spazio, il rapporto con gli altri e la conversazione sono esempi significativi. Come l'algoritmo, essi sono

organizzati attraverso certe regole e questo giustifica il fatto che si tenti l'avvicinamento, l'analogia. Una ragione ulteriore è che, nelle stesse situazioni matematiche, l'attività spesso non è altro che algoritmica.

L'adattamento a delle situazioni nuove e la variabilità dell'attività nel corso dello sviluppo sono particolarmente importanti per la ricerca in didattica, tant'è vero che lo sviluppo dipende da questo adattamento, sia che si produca con l'aiuto o senza l'aiuto di altri. Questo adattamento avviene solo raramente attraverso la scoperta e l'uso di algoritmi, ma piuttosto grazie al ricorso a degli schemi personali, e anche grazie all'affinamento di certi istinti, come nel caso della modificazione del camminare per l'apprendimento del ballo.

L'insegnamento è in certo senso una provocazione, nel senso che richiede, fra altre cose, che il maestro o il formatore proponga agli allievi o agli apprendisti delle situazioni che sono al margine del loro repertorio, proprio allo scopo di provocare e favorire il loro adattamento a tali nuove situazioni. Ciò presuppone, nel ricercatore e nell'insegnante, una certa visione epistemologica delle situazioni e una certa rappresentazione del repertorio degli allievi, variabile secondo gli individui e secondo le culture.

Queste considerazioni non sono indipendenti le une dalle altre; ma, per semplicità estrema, le tratteremo in due sezioni distinte nel seguito del presente articolo: Situazioni e campi concettuali (§ 2); Istinto, schema e algoritmo (§ 3).

2. Situazioni e campi concettuali

Esiste per uno stesso concetto una certa varietà di situazioni, per analizzare le quali si può ricorrere a dei concetti diversi e a proprietà diverse di tali concetti. Per esempio, per la ricerca del quarto proporzionale, nel caso in cui non si hanno che due variabili proporzionali l'una all'altra, le risorse usate dagli allievi sono di una certa varietà. Prendiamo un esempio.

Due bambini hanno appena ricevuto un bellissimo cronometro come regalo dalla loro nonna. Sono in treno e notano che questo impiega 16 minuti fra due cittadine A e B la cui distanza è a loro nota: 40 km. Un po' più tardi, verificano una durata di 36 minuti fra due altre cittadine X e Y; essi allora si chiedono quale sia la distanza fra X e Y. Entrambi convengono che la velocità del treno sia costante.

A. Una prima idea consiste nel dividere 40 per 16 e applicare questo coefficiente di proporzionalità a 36. La proprietà implicitamente utilizzata è il calcolo della velocità (qui rappresentata dal coefficiente di proporzionalità). L'applicazione di questo coefficiente a 36 permette di trovare la distanza fra X e Y.

B. Una seconda idea consiste nel dividere 36 per 16 e nell'applicare questo rapporto fra le due durate alla distanza di 40 km.

C. Una terza possibilità consiste nel moltiplicare 16 minuti per 2 per

avvicinarsi a 36 minuti, rilevare la differenza fra 32 e 36, cioè 4 minuti, che è un quarto di 16. Per isomorfismo, i bambini possono applicare successivamente a 40 km il rapporto $\times 2$ e il rapporto $/4$ (dividere per 4) e aggiungere le due distanze: 80 km (40 moltiplicato per 2) e 10 km (40 diviso per 4).

D. Una quarta possibilità, spesso osservata, consiste nel cercare la differenza fra le due durate osservate, 36 e 16, e nel decidere come usare questo risultato: forse aggiungerlo a 40, per esempio. Si tratta evidentemente di un errore, ma è indicatore di una preoccupazione nel voler comparare tra loro grandezze di una stessa natura, suscettibili di essere poi usate nel calcolo delle distanze.

Si possono osservare almeno una dozzina di altri possibili comportamenti, spesso ancora più sorprendenti del caso **D**. Non è affatto difficile identificare le proprietà della funzione lineare usate nei quattro casi.

A consiste nel cercare il coefficiente di proporzionalità fra distanza e durata e a applicarlo alla nuova durata, 36 minuti.

$F(x) = ax$ cercare e calcolare a .

L'inconveniente di questo ragionamento, per qualche allievo, è che si dividono l'una per l'altra due grandezze di natura diversa, una distanza per una durata. Si tratta dunque di un quoziente dimensionale. Questo ragionamento non è evidente, come mostrano le esitazioni degli allievi a farvi ricorso e i mezzi osservati nel corso della storia per aggirarlo: si accetta di dividere una grandezza sia per un'altra della stessa natura, sia per un numero senza dimensione, ma si accetta con più difficoltà di dividere una grandezza per un'altra di natura diversa.

La scelta della seconda idea **B** permette proprio di evitare tale difficoltà, perché in tal caso si calcola il rapporto fra due durate: è un numero senza dimensione. E lo si applica a 40 km.

$F(kx) = kf(x)$ cercare e calcolare k

L'idea **C** permette di evitare la divisione di 36 per 16, per nulla agevole per gli allievi, trasformando 36 in una somma di due grandezze, 32 minuti e 4 minuti. Il teorema che spiega questo ragionamento è una forma lineare che usa allo stesso tempo l'isomorfismo moltiplicativo e l'isomorfismo additivo:

distanza $(32+4) =$ distanza $(32) +$ distanza (4)

distanza $(2 \times 16) = 2$ (distanza $(16))$ distanza $(16/4) =$ (distanza $(16))/4$

La scelta **D**, come accade per altre proposte, testimonia la difficoltà delle strutture moltiplicative, in questo caso del concetto di rapporto al quale è sostituito quello di differenza.

Inoltre, più d'una dozzina di altre "invenzioni" riscontrate nelle attività in aula testimoniano, come nel caso di **D**, che la differenza fra grandezze della stessa natura viene evocata abbastanza naturalmente; il che non capita quasi mai quando si tratta di relazioni fra grandezze di natura diversa. Pertanto, dal punto vista numerico, sarebbe più facile notare che 40 è 2 volte 16 più la metà di 16, mentre 36 è 2 volte 16 più un quarto di 16. Di fatto nessuno studente usa

la prima decomposizione (40 è 2 volte 16 più la metà di 16), la quale si scontra in effetti con questo ostacolo: non ha alcun senso aggiungere delle durate per ottenere una distanza.

I ragionamenti degli allievi non sono puramente numerici ma riguardano grandezze, non solamente numeri.

Un altro esempio complesso è quello della doppia proporzionalità: una variabile è proporzionale a due altre variabili, tra loro indipendenti. Questa struttura fondamentale, molto importante in fisica, ma che si osserva anche in numerose situazioni di calcolo di costi, dà luogo a una varietà impressionante di situazioni e di ragionamenti. Tali ragionamenti restano per lo più impliciti: il riferimento alla bilinearità non si esprime facilmente nel linguaggio ordinario e, perfino nell'insegnamento secondario, gli allievi lo comprendono con difficoltà. Una difficoltà concettuale nuova si manifesta, quella dell'indipendenza delle co-variazioni. Si possono trovare esempi in due vecchie pubblicazioni (Vergnaud, 1983a, 1983b).

Così, la tesi secondo la quale le strutture moltiplicative formano un campo concettuale sembra incontrovertibile, dato che queste strutture mettono in gioco, oltre alle operazioni di moltiplicazione e divisione, i concetti di rapporto, di funzione lineare, di funzione bilineare e n-lineare, di isomorfismo, di analisi dimensionale e di indipendenza. Questo campo concettuale può essere definito sia come un insieme di situazioni sia come un insieme di concetti. La padronanza di un concetto non si acquisisce in una sola tappa, ma in parecchie, e attraverso l'incontro con situazioni che coinvolgono proprietà diverse dei concetti, la cui padronanza può richiedere parecchi anni, per esempio una dozzina d'anni nel caso che ci interessa qui. Se si guardano i ragionamenti in situazione, alcuni sono precoci (4, 5 o 6 anni per le strutture additive, 8 o 9 per le strutture moltiplicative); altri sono più tardivi (16 o 17 anni, anche per gli allievi migliori); esistono dei ragionamenti che non sono mai scelti dagli allievi, e nemmeno da certi adulti.

Le due idee principali da ricordare sono, in primo luogo, la varietà delle proprietà di un concetto e, in secondo luogo, il ricorso a diversi concetti familiari per analizzare questa varietà. Si aggiunga a ciò il fatto che servono anni di formazione e una varietà di situazioni e di formalismi diversi per permettere agli allievi di padroneggiare questa varietà.

3. Istinto, schema e algoritmo

Un algoritmo è costituito da parecchi elementi che gli forniscono delle proprietà piuttosto caratteristiche:

- uno o più scopi, o ancora l'essere relativo a una classe di problemi;
- delle regole per concatenare le azioni e le informazioni acquisite man mano che l'attività progredisce;

- controlli sull'avanzamento del processo e sulla fondatezza delle operazioni effettuate;
- la soddisfazione di essere arrivati al risultato cercato, se così è, oppure alla conclusione che il problema non ha soluzione. E tutto ciò in un numero finito di passi.

Che il numero di passi debba essere finito è un criterio essenziale, come in un programma informatico: terminare il percorso algoritmico in un numero finito di passi sia per giungere alla risoluzione del problema posto, sia per giungere alla certezza che non c'è alcuna soluzione. È una condizione *sine qua non*; all'inizio della rivoluzione informatica, negli anni '70, certi programmi non terminavano mai e il calcolatore continuava a funzionare senza mai fermarsi. La funzionalità dell'algoritmo non si manifestava che dopo una lunga durata di funzionamento: come decidere allora se l'algoritmo è efficace o no?

Poiché certe proprietà dell'algoritmo spettano anche a forme non algoritmiche dell'attività, a eccezione proprio del numero finito di passi, occorre esaminarle attentamente.

Cominciamo dal concetto di schema; noi lo definiamo in base a quattro componenti:

- uno o più scopi;
- regole di azione, di assunzione di informazione e di controllo;
- invarianti operatori; concetti-in-atto e teoremi-in-atto;
- possibilità d'inferenza.

È essenziale secondo noi non accontentarsi dell'idea di azione, per quanto essa sia importante: l'attività è in effetti piena di assunzioni d'informazione, necessarie sia per determinare le successive azioni sia per controllare la legittimità e il corretto sviluppo delle azioni già effettuate.

Gli invarianti operatori (concetti-in-atto e teoremi-in-atto) caratterizzano il contenuto concettuale delle regole effettivamente seguite e la loro adeguatezza se esse sono pertinenti; se non lo sono, gli invarianti operatori permettono di caratterizzare gli errori commessi in termini concettuali. Senza gli invarianti operatori, non sarebbe possibile comprendere la relazione fra le due componenti della conoscenza: la sua forma operatoria, che permette di agire in situazione, e la sua forma predicativa, che permette di enunciare gli oggetti di pensiero e le loro proprietà.

Le possibilità di inferenza sono a loro volta necessarie per comprendere da una parte le previsioni e attese dell'attività e, dall'altra parte, le ragioni alla base di nuove informazioni, decisioni d'azione, assunzioni di nuove informazioni, nuove azioni. L'attività è anche calcolo.

La somiglianza fra la definizione di schema e quella di algoritmo è evidente. Semplicemente, gli algoritmi sono degli schemi, ma non tutti gli schemi sono degli algoritmi. Si vede la loro complementarità in due casi molto importanti:

- quando un allievo dimentica una parte di un algoritmo, per esempio della divisione, o una parte del ragionamento proporzionale, e la sostituisce con degli schemi personali;
- quando un allievo affronta una situazione nuova per lui e non dispone di un algoritmo che lo possa aiutare; egli fa allora appello a tutte le sue risorse, cioè a quelle dei suoi schemi apparentemente promettenti.

Riguardo al concetto di *istinto*, è più sottile identificare la sua relazione con i concetti di schema e di algoritmo. Si sa bene che gli istinti sono suscettibili di adattarsi alle circostanze e dunque di far posto all'intelligenza, ma è piuttosto nella direzione dell'automatizzazione dello sviluppo dell'attività che bisogna secondo noi cercare la parentela. In effetti il controllo della progressione e dello sviluppo dell'attività, nello schema e nell'algoritmo, richiede una vigilanza quasi permanente. Questa vigilanza deve essere evidenziata. Questa evidenziazione può intervenire quando lo sviluppo dell'attività (azioni, assunzioni di informazione, controlli) è abbastanza ben dominata affinché siano soppressi certi controlli. Ne consegue una certa automatizzazione che può dare un'illusione all'osservatore: costui può credere di avere a che fare con un vero automatismo, che richiedere esercizi ripetitivi per essere appreso, prima che si possa procedere a degli apprendimenti più intelligenti.

Non si possono confondere istinto, schema e algoritmo, benché a volte si sia tentati di farlo proprio a causa del fatto che i tre concetti designano forme organizzate dell'attività. Ma, allo stesso tempo, non è errato riconoscere la loro analogia. Proprio l'organizzazione delle attività è uno dei criteri interessanti riguardanti la vita; e si possono cercare le forme che questa ha assunto nel corso dell'evoluzione delle specie e della storia.

Riferimenti bibliografici

- Vergnaud, G. (1983a). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127–174). New York: Academic Press.
- Vergnaud, G. (Ed.). (1983b). *Didactique et acquisition du concept de volume. Recherches en Didactique des Mathématiques* [Numero speciale], 4(1), 9–25.

[Traduzione di Bruno D'Amore e Maura Iori]